LES FONCTIONS LN ET EXP

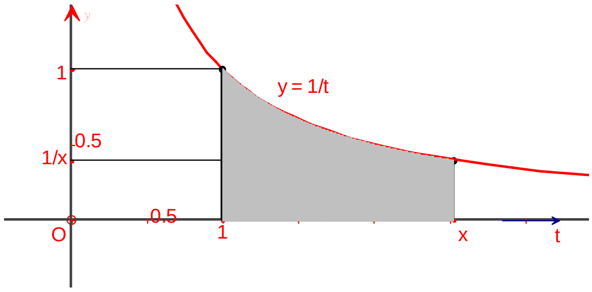
§1 Introduction

1.1 Une nouvelle fonction

Soit la fonction f (puissance $n^{\text{ième}}$)définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ par $y = f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Q}$;
cette fonction est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}^*$ et $f\,'(x) = n\,x^{n-1}$;
on en déduit que, par définition, une primitive de la fonction f est la fonction F définie par
$y = F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$, sauf pour n = -1 .

Ainsi la fonction inverse g définie par $y = g(x) = \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de primitive.

- Considérons la fonction g, mais définie sur $\mathbb{R}_+^*$;
  elle y est continue et donc intégrable sur tout intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.



- Soit la fonction notée " ln " (prononcée pour l'instant "ellen")

  définie dans $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par $y = \ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$;

  par le théorème de Riemann ce nombre ln(x) est bien défini, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$;
  par le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction ln est une primitive de la fonction g .

1.2 Propriétés de la fonction ln

- Propriétés immédiates :

1) $\ln(1) = 0$, car $\displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$;
2) si $0 < x < 1$, alors $\ln(x) < 0$
   si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$ (par définition) ;
3) $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$;
4) $[\ln(f(x))]' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f\,'(x) = \dfrac{f\,'(x)}{f(x)}$, $\forall x \in R$ tel que $x \in D_f$ et $f(x) > 0$;
5) attention : $\displaystyle\int \frac{f\,'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$;

   en effet : $$\left[\ln|f(x)|\right]' = \frac{|f(x)|'}{|f(x)|} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f\,'(x)}{f(x)} \text{ et } f(x) \rangle 0 \\ \dfrac{-f\,'(x)}{-f(x)} \text{ et } f(x) \langle 0 \end{array}\right\} = \frac{f\,'(x)}{f(x)}\ ;$$

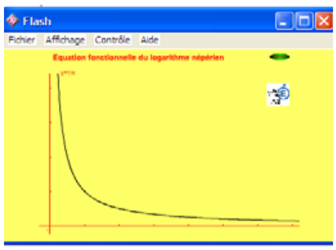
   exemple : $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+8}\,dx = \ln|x^3+8| + c$
6) Par construction, la fonction ln est strictement croissante, c'est-à-dire
   $\forall\ \{x_1,x_2\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2)$

- Propriétés fondamentales :

Théorème 1 : La fonction ln est un morphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ dans le groupe additif $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, $\forall \{x,y\} \in \mathbb{R}_+^*$.

démonstration : …



Interprétation géométrique du théorème 1 : [ouvrir le visualisation en flash].
[ouvrir la figure cabri]

Corollaire 1 du théorème 1 : $\begin{cases} \text{a) } \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \\ \text{b) } \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y) \end{cases}$; $\forall \{x, y\} \in \mathbb{R}_+^*$

Corollaire 2 du théorème 2 : a) $\ln\left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n\right) = \ln\left(x_1\right) + \ln\left(x_2\right) + \ln\left(x_3\right) + \cdots + \ln\left(x_m\right)$

$\forall \left\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

b) $\ln\left(x^n\right) = n \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Théorème 2 : Le corollaire 2b) reste vrai si $n \in \mathbb{Q}$.

démonstration : …

- Définition de x^n avec $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$: on peut maintenant définir le nombre x^n de la manière suivante : on calcule $n \cdot \ln(x)$; comme ln est bijective car croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe un et un seul réel y tel que $\ln(y) = n \cdot \ln(x)$. On pose alors, par définition, que ce nombre y est x^n.
On a évidemment, et par définition, $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$, $\forall n \in \mathbb{R}$, formule qui prolonge le théorème 2 au cas où $n \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Cette définition de x^n concorde avec l'ancienne lorsque $n \in \mathbb{Q}$ car ln est bijective.
De plus, on peut alors démontrer (et non seulement admettre comme précédemment) le théorème suivant :

Théorème 3 : $\forall \{x,z\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall \{n,m\} \subset \mathbb{R}$, on a :

1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$
2) $(xz)^n = x^n \cdot z^m$
3) $\left(x^n\right)^m = x^{nm}$

démonstration :

1) on a : $\ln(x^n \cdot x^m) = \ln(x^n) + \ln(x^m) = n \cdot \ln(x) + m \cdot \ln(x) = (n+m) \cdot \ln(x) = \ln(x^{n+m})$
d'où $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ car ln est bijective.
2) de même : $\ln[(xz)^n] = n \cdot \ln(xz) = n \cdot [\ln(x)+\ln(z)] = n\ln(x)+n\ln(z)$
$= \ln(x^n)+\ln(z^n) = \ln(x^n \cdot z^m) \Leftrightarrow (xz)^n = x^n \cdot z^m$;
3) et : $\ln\left(x^n\right)^m = m \cdot \ln(x^n) = m \cdot (n\ln(x)) = (mn) \cdot \ln(x) = \ln(x^{mn}) \Leftrightarrow \left(x^n\right)^m = x^{mn}$.

§2 Etude de la fonction ln

2.1 Domaine : par définition, le domaine de la fonction ln est $\mathbb{R}_+^*$;

2.2 Parité : la fonction ln n'admet aucune parité, car son domaine n'est pas symétrique ;

2.3 Asymptotes :

2.3.1 Asymptotes verticales : on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = -\infty$, donc $\boxed{x = 0}$ est A.V.

preuve : on démontre tout d'abord que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$:

par construction, la fonction ln est strictement croissante et on a, $\forall x\in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n\in\mathbb{N}$, on a

$2^{n+1} > x > 2^n \Leftrightarrow \ln(x) > \ln(2^n) \Leftrightarrow \ln(x) > n\ln(2)$, or $\ln(2)>0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[n\ln(2)\right] = +\infty$; et si $n \to+\infty \Leftrightarrow x \to+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

De plus, en posant $x' = \dfrac{1}{x}$, on a $\underset{>}{x\to 0} \Leftrightarrow x' \to +\infty$ et

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(x) = \lim_{x'\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x'}\right) = \lim_{x'\to+\infty} -\ln\left(x'\right) = -\lim_{x'\to+\infty} \ln\left(x'\right) = -\infty. \quad \text{CQFD}$$

2.3.2 Asymptotes aux infinis : on ne recherche que les éventuelles asymptotes affines d'équation y = mx+h ;

calculons m = $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$:

si $t > 1$, alors $\sqrt{t} > 1$ et $\sqrt{t}\,\sqrt{t} > \sqrt{t} \Rightarrow t > \sqrt{t} \Leftrightarrow \dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et on a alors

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt < \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \Leftrightarrow 0 < \ln(x) < 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

donc $0 < \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} < \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Ainsi la fonction ln admet une asymptote horizontale d'équation y = h ;
or nous savons que h = $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$,

donc ln admet une asymptote horizontale "rejetée à l'infini".

On peut aussi démontrer cette limite avec le théorème de l'Hospital :

> Si f et g sont deux fonctions dérivables sur V-{a}, V étant un voisinage de a,
> si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
> si $g'(x) \neq 0$, $\forall x\in$V-{a} et si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ ou $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$,
> alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

(le théorème est encore valable si a = +∞, ou a = -∞ et même si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$)

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left[\ln(x)\right]'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2.4 Dérivée première :

on a construit la fonction ln telle que $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

donc la fonction ln est strictement croissante sur son domaine $\mathbb{R}_+^*$.

2.5 Dérivée seconde :

on a $[\ln(x)]'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et donc le graphique de ln est concave.

2.6 Tableau récapitulatif :

x	-∞	1	+∞
$[\ln(x)]'$	+	1	+
$[\ln(x)]''$	-		-
ln(x)	-∞	0	+∞
		-	

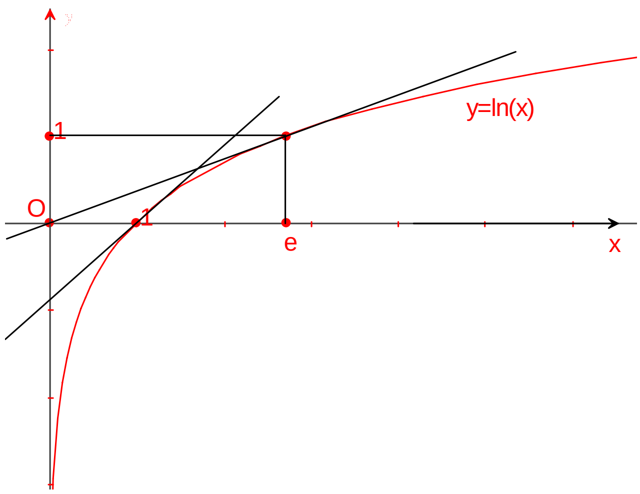
La fonction ln est croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, est une fonction bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, comme $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$, la fonction ln est un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ vers le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$.

2.7 Graphique :

Tout nombre réel y est donc l'image par ln d'un nombre réel strictement positif et d'un seul.
En particulier, il existe un et un seul nombre dont l'image par ln vaut 1 : on le désigne par **e**.

Par définition, le nombre e est supérieur à 1. Nous verrons dans la suite que ce nombre e est d'une importance capitale en mathématiques.



§3. FONCTION EXPONENTIELLE

3.1 DEFINITION ET CONSEQUENCES IMMEDIATES

Puisque ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une application réciproque :

Définition 3.

On appelle *fonction exponentielle* la fonction réciproque de ln :

$$\exp = \ln^{-1} \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & y = \exp x \end{array}$$

On a : $\mathbb{R}_+^* \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$

$y \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} x \quad : \quad \boxed{y = \exp x \iff \ln y = x}$ (1)

et $\exp \circ \ln = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$ (2) et $\ln \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (3)

Remarque

De (3) , il résulte pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$\ln(\exp x) = x = x \cdot 1 = x \cdot \ln e = \ln(e^x)$

et par suite, puisque ln est injective : $\exp x = e^x$.

La fonction exponentielle que nous venons d'introduire est donc bien une fonction exponentielle au sens que nous avions introduit antérieurement : la fonction exponentielle de base e : $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$.

Il en résulte que la fonction ln est bien une fonction logarithme : celle de base e .

Les relations (1) , (2) et (3) peuvent alors s'écrire :

(1') $\boxed{y = e^x \iff \ln y = x}$ $x \in \mathbb{R}$

(2') $e^{\ln x} = x$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

(3') $\ln(e^x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

3.2 EXPONENTIELLE D'UNE SOMME

Rappelons le résultat suivant :

Théorème 3.

> **exp : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R} , +)$ sur le groupe $(\mathbb{R}_+^* , \cdot)$.**

Ainsi : $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$

ou $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.

Ce théorème découle des propriétés de la réciproque d'un isomorphisme de groupes. Sa démonstration peut aussi être faite directement en calculant le logarithme naturel de chaque membre.

3.3 ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Soit $y = e^x \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ln y = x$.

La formule de dérivation de la réciproque d'une fonction nous permet de calculer la dérivée

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x \quad : \qquad \boxed{(e^x)' = e^x}$$

Ainsi la fonction exponentielle est égale à sa dérivée !

On en déduit : $\boxed{(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)}$,

u étant une fonction dérivable de x .

Note

En physique, tout phénomène dont la vitesse est proportionnelle à la fonction s'exprime par une fonction exponentielle. Par exemple, la température d'un corps chaud, qui se refroidit dans l'air, est une fonction exponentielle du temps.

La fonction exp étant la réciproque de la fonction ln , sa courbe représentative est la symétrique de la courbe représentative de la fonction ln par rapport à la première bissectrice.