EXERCICES **Fonction « ln »**

1) En utilisant la définition de $\ln x$ comme aire, établir à nouveau ce que vaut $\ln' x$ à partir d'estimations de l'accroissement $\Delta \ln_{(x,\Delta x)}$ par excès et par défaut.

2) Chercher l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions données par :

a) $f(x) = \ln(x - 1)$ b) $f(x) = \ln(1 - x)$

c) $f(x) = \ln(x^2 - x)$ d) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{1 - x}$

e) $f(x) = \ln \dfrac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2 + 3}$

f) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ g) $f(x) = \ln \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = \ln \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$ i) $f(x) = \ln(\sin x)$

j) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2})$

k) $f(x) = \ln \sqrt{g(x)}$, g étant positive et dérivable dans $[a,b]$

l) $f(x) = \ln(h(x))^3$, h étant une fonction positive et dérivable dans $[a,b]$.

Pour certaines fonctions, le calcul de la dérivée pourra se faire soit directement, soit après avoir modifié la forme de $f(x)$.

3) Déterminer les primitives des fonctions données par :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x + 4}$ d) $f(x) = x^2 + x - 1 + \dfrac{3}{5x - 1}$

4) Calculer

a) $\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx$ b) $\int_5^7 \frac{1}{x-2}\,dx$

c) $\int_1^4 (x + 3 - \frac{1}{x+1})dx$ d) $\int_0^4 \frac{2}{2x+3}\,dx$

e) $\int_1^2 \frac{5x+3}{5x^2+6x+7}\,dx$ f) $\int_0^2 \frac{6x^2-4x+2}{3x+4}\,dx$

g) $\int_2^6 \frac{8x^3+19x^2+15x+4}{x^2+2x+1}\,dx$

h) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$ i) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$

j) $\int_{2/3}^{5/4} \frac{1}{x}\,dx$ k) $\int_3^{5,7} \frac{1}{x-2}\,dx$

5) Peut-on calculer $\int_{-2}^{+2} \frac{1}{x+1}\,dx$?

6) Etudier les fonctions de l'exercice 2) a, b, c, d, e, f , ainsi que les suivantes données par :

$f(x) = \ln|x^2 - x|$ et $f(x) = \ln \sqrt[3]{x^4 - 5x^2 + 8}$.

Pour étudier la fonction données par $f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x}$; on propose d'étudier auparavant celle donnée par

$g(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

7) Donner l'ensemble de définition et calculer la dérivée des fonctions données par :

a) $f(x) = \ln|\ln x|$ b) $f(x) = \ln|\ln|x||$

c) $f(x) = \ln(\ln|x|)$ d) $f(x) = \ln(\ln x)$

EXERCICES Fonction « exp »

1) Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions données par :

a) $f(x) = e^{1/x}$ b) $f(x) = e^{x^2+2}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$

e) $f(x) = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ f) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

g) $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$ h) $f(x) = e^{\cos x}$

i) $f(x) = e^{\ln x}$

2) Etudier les fonctions données par :

a) $f(x) = e^{1-2x}$ b) $f(x) = e^{-x^2}$

3) Calculer

a) $\int_1^2 e^x dx$ b) $\int_1^2 e^{3x-7}\, dx$ c) $\int_0^2 e^{x^2} \cdot x\, dx$

4) Montrer que les seules fonctions f telles que $f' = f$ sont des multiples de la fonction exponentielle.

5) En utilisant la définition de la dérivée de exp au point $x = 0$ et par comparaison avec le résultat du No. 2.3 , établir que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

6) Prouver que $\frac{e^a + e^b}{2} > e^{\frac{a+b}{2}}$ à partir de considérations géométriques au sujet de la courbe $y = e^x$.